Recherche proposée – Construction des algèbres de symétrie réalisées par des opérateurs de Dunkl

a) Problématique : Les systèmes intégrables forment une part importante de la physique mathématiques : ils admettent souvent des solutions explicites et maints systèmes physiques importants en sont. Les outils numériques, analytiques et algébriques offrent des avenues complémentaires permettant respectivement d'établir des conjectures, de voir le comportement local et de mettre à jour la structure unifiante. Nous considérons dans cette recherche les problématiques reliées à l'approche algébrique. De façon standard, cette étude considère le système par l'entremise de ses symétries; dans les cas qui nous intéressent par exemple, ceci est fait en développant une algèbre à partir des opérateurs de moment cinétique total et en exploitant les résultats de la théorie de la représentation. Récemment, [3] et [2], ont montré comment l'ajout de perturbations reliées à des groupes de réflexion permet des généralisations intéressantes. La classe des groupes de Weyl ont une signification profonde reliée à leur présence fondamentale dans la structure des algèbres de Lie simples, les blocs de construction des algèbres liés aux problèmes physiques.

b) Objectifs : Approfondir la théorie sur les systèmes intégrables par l'entremise de l'étude des réalisations par des opérateurs de Dunkl des déformations de l'algèbre du moment cinétique total par des termes de potentiels reliés à un groupe de Weyl et étudier les représentations unitaires associées. Relier l'approche aux résultats usant des algèbres diagrammatiques afin d'exploiter la structure combinatoire des systèmes de racines.

c) Méthodologie : Dans [3], le groupe de Weyl à l'étude était celui de A_2, le système de racine lié à $\mathfrak{sl}_3$. La démarche employée repose sur des opérateurs d'échelle qui permettent la construction de toutes les représentations unitaires. L'article [2] montre les points de départ à envisager en donnant l'algèbre de symétrie générée par les opérateurs pour une grande famille de système issus du laplacien modifié par les opérateurs de Dunkl. Des recherches préliminaires [4] donnent espoir de trouver une structure algébrique adéquate pour le cas du système de racine B_3.

Afin de généraliser les résultats, deux voies sont ouvertes : augmenter la dimension dans le cas de [3] et changer de système de racines pour couvrir les pistes de [2]. La recherche portera dans un premier lieu sur l'augmentation de la dimension en prenant des termes de potentiels liés à A_n afin d'user le plus possible des résultats connus tout en adaptant les preuves pour ne pas user des particularités spécifiques à la dimension. La prochaine étape est de passer aux autres familles d'algèbres de Lie simples, $\mathfrak{so}_{2n+1}$, $\mathfrak{sp}_{2n}$ et $\mathfrak{so}_{2n}$. Les groupes de Weyl liés aux systèmes de racines de ces trois familles : B_n, C_n et D_n deviennent beaucoup plus algébriquement compliqués. Déjà, des discussions avec des membres de la communauté pointent vers des difficultés à adapter la méthode de [3] dans le cas B_n en raison de la différence des opérateurs d'échelle. Dans cette optique, les propriétés plus combinatoires des groupes de Weyl devront être exploitées : une avenue intéressante passerait par des algèbres diagrammatiques, comme celles de Brauer, en faisant des liens avec leur théorie de la représentation.

Si jamais il s'avère que la démarche avec les algèbres diagrammatique est concluante, il sera intéressant de passer ensuite à la considération de problèmes avec les groupes quantiques pour voir les liens entre algèbre à dimension finie et le passage à l'infini.

d) Contributions au développement des connaissances : Les méthodes employées dans cette recherche couvrent une large classe de problèmes d'intérêt et des liens entre les systèmes physiques, les algèbres de Lie, la théorie de la représentation et la combinatoire naissent du projet proposé. La connaissance sur les systèmes intégrables avance à chaque nouveau système découvert et résolu : la méthode employée peut alors être généralisée et il est à espérer que la méthode particulière perce le voile et laisse passer une lumière qui éclaire des structures fondamentales. Ce projet débute après que la première percée ait été effectuée par l'entremise des articles [3] et [2]. Les liens qu'il est possible de faire avec la recherche de [4] et [1] montrent que les fils sont mûrs pour être reliés et nous avons espoir de pouvoir généraliser.

En s'attaquant à une grande classe de problème, cette recherche a pour ambition d'augmenter les connaissances pour l'étude de systèmes physiques pertinents selon des méthodes nouvelles ou nouvellement considérées.

Cette recherche est faite dans le cadre du projet *Promising Research on Integrable Models and Applications*, financé par le Fond de recherche flamand et est le fruit d'une collaboration entre UCL, KUL et UGent. J'ai déjà discuté avec Profs De Bie et Van der Jeugt sur leur article [3] et nous débuterons notre collaboration en janvier.

e) Bibliographie

[1] De Bie, H., Genest, V. X., and Vinet, L. The $\mathbb{Z}_{2n}$ Dirac-Dunkl operator and a higher rank Bannai-Ito algebra. *Advances in Mathematics 303* (2016), 390–414.

[2] De Bie, H., Oste, R., and Van der Jeugt, J. On the algebra of symmetries of Laplace and Dirac operators. *Letters in Mathematical Physics* (2018), 1–49.

[3] De Bie, H., Oste, R., and Van der Jeugt, J. The total angular momentum algebra related to the S_3 Dunkl Dirac equation. *Annals of Physics 389* (2018), 192–218.

[4] Genest, V., Lapointe, L., and Vinet, L. $\mathfrak{osp}(1,2)$ and generalized Bannai-Ito algebras. *arXiv preprint arXiv :1705.03761*.