

Contrôle stochastique dans un contexte de mesures cohérentes de risque

Plaçons nous dans un milieu financier où un individu peut investir à la fois dans des titres risqués et un titre sans risque. Un problème répandu consiste à trouver une stratégie financière minimisant le risque qui parvient à atteindre une richesse espérée à une date terminale prédéterminée. Si nous modélisons la dynamique des prix des titres à l'aide de processus stochastiques, c'est-à-dire des variables aléatoires évoluant dans le temps, alors ce problème se situe dans la théorie mathématique du contrôle stochastique.

Historiquement, en théorie de la finance mathématique, ce problème a été résolu la première fois lorsque la mesure de risque choisie était la variance. Cela a d'ailleurs valu au chercheur H. Markowitz le prix Nobel d'économie en 1990. Cependant, une des principales critiques émises pour le choix de la variance comme mesure de risque est sa symétrie autour de la richesse espérée, qui pénalise aussi bien les rendements supérieurs que ceux inférieurs à notre objectif. Bien entendu, nous pouvons proposer des mesures de risques alternatives, mais il faut prendre bien soin que celles-ci comportent des propriétés qui traduisent un comportement observé des investisseurs.

À cet effet, Artzner et al. [1] ont proposé la notion de mesure cohérente de risque, notion qui contient notamment dans son axiomatique mathématique un principe de diversification des actifs. Depuis, des chercheurs se sont penchés sur le problème de gestion de portefeuille avec différentes mesures de risques cohérentes telles que la perte moyenne outre-seuil (expected-shortfall) et la pire perte moyenne conditionnelle (worst conditional expectation). Par contre, leurs résultats ont l'hypothèse restrictive commune que l'individu est limité à une seule période d'investissement, c'est-à-dire qu'il ne peut pas modifier sa position avant la date terminale. En pratique, il devrait pouvoir réagir aux fluctuations du marché durant la période d'investissement et adapter sa stratégie financière en conséquence.

Ce mémoire porte sur l'analyse du problème de gestion optimale dans un contexte multipériodique et lorsque l'investisseur désire minimiser la perte moyenne outre-seuil. Dans un premier temps, nous familiarisons le lecteur avec les notions de mesures de risque et de cohérence pour justifier notre choix de l'expected-shortfall. Dans un deuxième temps, nous faisons appel à des méthodes probabilistes axées sur la simulation informatique afin de guider la pratique sur les possibles propriétés inhérentes de la stratégie optimale. Dans un troisième temps, nous effectuons, bien entendu, les développements analytiques rigoureux confirmant ces propriétés. Finalement, nous explorons la résolution de ce problème de contrôle stochastique, qui éclaire des perspectives ouvrant la voie à de futurs projets de recherche.

[1] Artzner P. et al., Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, 1999, pp. 203-228.