

Contrôle stochastique dans un contexte de mesures cohérentes de risque

Plaçons-nous dans un milieu financier où un individu peut investir à la fois dans des titres risqués (ex.: actions en bourse) et un titre sans risque (ex.: compte bancaire). Un problème répandu consiste à trouver une stratégie financière consistant à minimiser le risque tout en atteignant une richesse espérée à une date prédéterminée.

Si nous modélisons la dynamique des prix des titres à l'aide de processus stochastiques, c'est-à-dire des variables aléatoires évoluant dans le temps, alors ce problème se situe dans la théorie mathématique du contrôle stochastique.

En effet, la stratégie financière, c'est-à-dire la répartition $u(t)$ à un instant donné t des montants investis dans les différents titres, représente la variable de contrôle, tandis que la richesse associée $X(t)$ constitue la variable d'état. Ainsi, si nous choisissons une certaine mesure de risque m et fixons une date terminale d'investissement T , le problème mathématique devient le suivant :

Trouvez le processus stochastique $u(t)$ permettant de minimiser $m(X(T))$ sous la contrainte $E(X(T))=c$.

Historiquement, en théorie de la finance mathématique, ce problème a été résolu la première fois lorsque la mesure choisie était la variance. Cela a d'ailleurs valu au chercheur H. Markowitz le prix Nobel d'économie en 1990. Cependant, une des principales critiques émises pour le choix de la variance comme mesure de risque est sa symétrie autour de la richesse espérée. Ainsi, en minimisant la variance, nous pénalisons aussi bien les rendements financiers supérieurs que les rendements inférieurs à notre objectif. Bien entendu, nous pouvons proposer des mesures de risques alternatives, mais il faut prendre bien soin que celles-ci comportent des propriétés qui traduisent un comportement observé des investisseurs.

À cet effet, Artzner et al. (1) ont proposé la notion de *mesure cohérente de risque*, notion qui contient notamment dans son axiomatique mathématique un principe de diversification des actifs. Depuis, des chercheurs se sont penchés sur le problème de gestion de portefeuille avec différentes mesures de risques cohérentes telles que l'*expected shortfall* (2) et la *worst conditional expectation* (3). Par contre, leurs résultats ont l'hypothèse restrictive commune que l'individu est limité à une seule période d'investissement. En pratique, il devrait pouvoir réagir aux fluctuations du marché durant la période d'investissement et adapter sa stratégie financière en conséquence.

Pour une mesure cohérente de risque donnée, nous nous proposons d'analyser principalement le problème de gestion optimale dans un contexte multipériodique, l'étude des mesures cohérentes ayant été initiée dans le cadre de mon stage de recherche CRSNG sous la supervision du professeur François Watier lors de l'été 2016. Dans un premier temps, nous ferons appel à des méthodes probabilistes axées sur la simulation informatique afin de nous guider sur les possibles propriétés inhérentes de la stratégie optimale. Dans un deuxième temps, nous effectuerons, bien entendu, des développements analytiques rigoureux confirmant ces propriétés.

Bibliographie

- (1) Artzner P. et al., Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, 1999, pp. 203-228
- (2) Bertsimas D. et al., Shortfall as a risk measure : properties, optimization and applications, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 7, 2004, pp. 1353-1381.
- (3) Benati S., The computation of the worst conditional expectation, *European Journal of Operational Research*, Vol. 155, No. 2, 2004, pp.414-425.